منتدى تو عرب التعليمي

www.arabia2.com/vb

موقع توعرب التعليمي

www.arabia2.com/vb

التمرين الأول : أوجد عدد حلول المعادلة $x^3+3x-1=0$ في $\mathbb{R}$ ؟

التمرين الثاني : احسب النهايات عند a :

$$f(x)=\frac{\tan 2x-1}{x-\frac{\pi}{8}} \; ; a=\frac{\pi}{8} \qquad f(x)=\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10} \; ; a=10$$

التمرين الثالث : f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x}$

١) عيّن قيمة a,b ليكون للخط البياني C مماساً أفقياً عند النقطة $A(1,3)$ ؟
٢) عيّن قيمة a,b ليكون للخط البياني C مماساً معادلته $y=-3x+9$ في نقطة فاصلتها 1 ؟

التمرين الرابع : f تابع معرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق : $f(x)=\frac{1}{x-2}$

١) احسب f على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ ؟
٢) اثبت بالاستقراء الرياضي ان المشتق من المرتبة n يعطى بالعلاقة $f^n(x)=\frac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}}$ حيث $n\geq 1$ ؟

التمرين الخامس : f تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\frac{x+4}{|x|+2}$

١) اثبت ان f اشتقاقي عند الصفر من اليمين ، و اكتب معادلة نصف المماس من اليمين عند $A(0,2)$ ؟
٢) اثبت ان f اشتقاقي عند الصفر من اليسار ، و اكتب معادلة نصف المماس من اليسار عند $A(0,2)$ ؟
٣) ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ؟
٤) ارسم مثلاً من نصفي المماسين ، و اسم الخط C ؟

التمرين السادس : f تابع معرف على $\mathbb{R}^*$ وفق : $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$

١) عيّن عددين حقيقيين a,b يجعلان للخط البياني C قيمة حدية عند $A(1,2)$ ؟
٢) بفرض $a=b=1$ ، المطلوب :
a) ادرس تغيرات f و نظم جدولاً بها ؟
b) اثبت ان f تابع فردي ؟
c) اوجد معادلة مثل مماس موازٍ للمستقيم $d:y=-3x$ ؟
d) اوجد معادلة المقارب المائل Δ للخط C في جوار $+\infty$ ؟ و ادرس الوضع النسبي ؟
e) ارسم المقارب Δ و الخط C ؟

التمرين السابع : f تابع معرف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=2\sin x+\sin 2x$

١) تحقق ان f تابع دوري دوره 2π ؟ و بيّن ان التابع f فردي ؟
٢) استنتج انه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$ ؟
٣) اثبت من اجل x عدد حقيقي لدينا : $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$ ؟
٤) ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$ ؟
٥) ارسم الخط البياني C على المجال $[-2\pi,2\pi]$ ؟

ملاحظة :
حل النموذج على التلغرام
بتطبيق telegram
\Math2020i

هاني العجيل
00963755556

/ حل نموذج الاشتقاق /

حل التمرين 1 : نعرف تابعا

$$f(x) = x^3 + 3x - 1$$

f تابع معرف ومستمر على $]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

f اشتقاقي على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

نفرض $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = -1$$

مستحيلة الحل

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	⟶	$+\infty$

f تابع مستمر وتزايدي تماما على $]-\infty; +\infty[$

$$f(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$$

$$0 \in]-\infty; +\infty[$$

يوجد لكل عدد حقيقي $f(x) = 0$ حل وحيد في $\mathbb{R}$

حل التمرين 2

$$* \; f(x) = \frac{\tan 2x - 1}{x - \frac{\pi}{8}} \quad ; \quad a = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{8}} f(x) = \frac{\tan\frac{2\pi}{8} - 1}{\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - 1}{0}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} f(x) = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نفرض

$$g(x) = \tan 2x$$

اشتق g :

$$g'(x) = 2(1 + \tan^2 2x)$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 + \tan^2 \frac{2\pi}{8}\right)$$

$$= 2(1+1) = 4$$

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} f(x) = g'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$$

$$* \; f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x - 10} \quad a = 10$$

$$\lim_{x \to 10} f(x) = \frac{\sqrt{10-1} - 3}{10 - 10} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$$ حالة عدم تعيين

نفرض $g(x) = \sqrt{x-1}$

اشتق g :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$g'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 10} f(x) = g'(10) = \frac{1}{6}$$ حسب تعريف العدد المشتق

حل التمرين 3

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x}$$

1) تكون النقطة $A(1;3)$ من C_f إذا كانت A في حدية التابع والقيمة الحدية هي نقطة تنتمي لـ C

$$\Rightarrow f(1) = 3$$

$$\frac{a(1)^2 + b(1) + 1}{1} = 3 \Rightarrow \frac{a+b+1}{1} = 3$$

$$\Rightarrow a = -b - 1 + 3$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -b + 2} \; *$$

توعرب

والقيمة الحدية: نقطة تعدم المشتق

$\Rightarrow f'(1) = 0$

f مشتق بالنسبة إلى $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)x - 1(ax^2+bx+1)}{x^2}$$

$$= \frac{2ax^2+bx-ax^2-bx-1}{x^2} = \frac{ax^2-1}{x^2}$$

$\Rightarrow f'(1) = 0$

$$\frac{a(1)^2-1}{1} = 0 \Rightarrow a-1=0$$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

نعوض في المعادلة (1)

$1 = -b+2$

$\boxed{b=1}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$$

2) نعوض الفاصلة (1) في معادلة المماس

$y = -3(1)+9 = -3+9 = 6$

نقطة التماس $(1,6)$

$f(1) = 6 \Leftarrow C$ نقطة التماس تنتمي لـ

$$\frac{a+b+1}{1} = 6 \Rightarrow \boxed{a = -b+5} \quad (1)$$

في معادلة المماس لدينا $m = -3$

$\Rightarrow f'(x_0) = m$

$\Rightarrow f'(1) = -3$

$$\frac{a(1)^2-1}{(1)^2} = -3 \Rightarrow a-1 = -3$$

$\boxed{a=-2}$

نعوضها في العلاقة (1)

$-2 = -b+5 \Rightarrow \boxed{b=7}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2+7x+1}{x}$

حل التمرين (4) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

1) نشتق f بالنسبة إلى $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x) = \frac{0(x-2)-1(1)}{(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\left[f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}\right]$$

2) القضية $\left[f^n(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}\right]$

• نبرهن على صحة العلاقة من أجل $n=1$

$$L_1 = f'(x) = \frac{(-1)^1 \cdot (1)!}{(x-2)^{1+1}} = \frac{-1\times 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)^2} = f'(x)$$

العلاقة صحيحة من أجل $n=1$

• نفرض صحة العلاقة من أجل n

لنبرهن على صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$\Rightarrow f^{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(x-2)^{n+2}}$$

البرهان:

$$L_1 = f^{n+1}(x) = [f^n(x)]'$$

$$= \frac{0(x-2)^{n+1} - (n+1)(x-2)^{n+1-1}\cdot(-1)^n \cdot n!}{\left((x-2)^{n+1}\right)^2}$$

$$= \frac{-1(n+1)(x-2)^n \cdot (-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{2n+2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(x-2)^{2n+2}\cdot(x-2)^{-n}} = \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(x-2)^{n+2}}$$

$= L_2$ العلاقة صحيحة من أجل $n+1$

حل التمرين 5

$$f(x) = \frac{x+4}{|x|+2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{x+2} & : x \geq 0 \text{ يمين} \\ \frac{x+4}{-x+2} & : x \leq 0 \text{ يسار} \end{cases}$$

1) ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين

$$h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+4}{x+2} - \left(\frac{4}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{\frac{x+4}{x+2} - \frac{2}{1}}{x} = \frac{\frac{x+4-2x-4}{x+2}}{x}$$

$$= \frac{\frac{-x}{x+2}}{\frac{x}{1}} = \frac{-x}{x(x+2)} = \frac{-1}{x+2}$$

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$$

f اشتقاقي عند الصفر من اليمين.

★ $A(0,2)$ نقطة تماس بيان c وصف لماس من اليمين Δ_1

$$m = f'(0) = \lim_{x \to 0} h(x) = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-0)$$

$\Rightarrow \left(y = -\frac{1}{2}x + 2\right)$ معادلة Δ_1

2) ندرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار

$$h(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x+4}{-x+2} - \left(\frac{4}{2}\right)}{x}$$

$$= \frac{\frac{x+4}{-x+2} - 2}{x} = \frac{\frac{x+4+2x-4}{-x+2}}{\frac{x}{1}} = \frac{3x}{x(-x+2)}$$

$$h(x) = \frac{3}{-x+2}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = \frac{3}{0+2} = \frac{3}{2}$$

f اشتقاقي عند الصفر من اليسار

★ $A(0,2)$ نقطة تماس بيان c وصف لماس من اليسار وليكن Δ_2

$$m = f'(0) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} h(x) = \frac{3}{2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x-0)$$

$\Rightarrow \left(y = \frac{3}{2}x + 2\right)$ معادلة Δ_2

3) نفرض $f_1(x) = \frac{x+4}{x+2}$

f_1 معرفة ومستمرة على $[0, +\infty[$

$$f(0) = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$$ $y = 1$ مقارب أفقي بجوار $+\infty$

f_1 اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f_1'(x) = \frac{1(x+2)-1(x+4)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-4}{(x+2)^2}$$

$$f_1'(x) = \frac{-2}{(x+2)^2} < 0$$

f_1 تابع متناقص تماماً على $]0,+\infty[$

بفرض $f_2(x) = \frac{x+4}{-x+2}$

f_2 تابع معرف ومستمر على $]-\infty,0]$

$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -1$ مقارب أفقي $y=-1$ جوار $-\infty$

$f_2(0) = \frac{4}{2} = 2$

f_2 اشتقاقي على $]-\infty,0]$

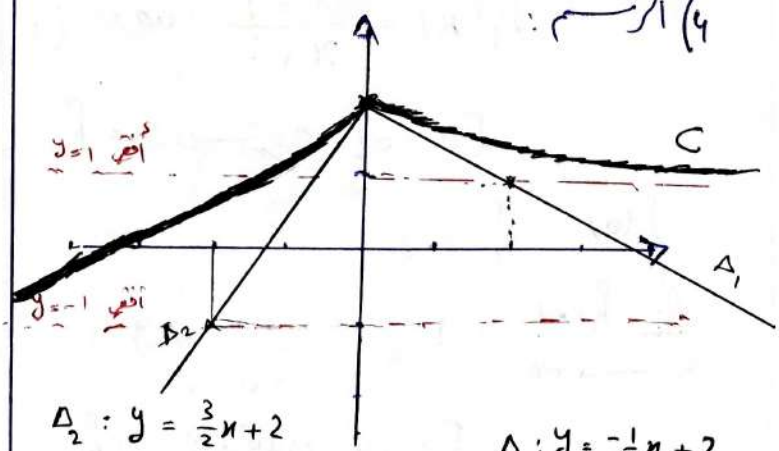
$$f_2'(x) = \frac{1(-x+2) - (-1)(x+4)}{(-x+2)^2}$$

$$= \frac{-x+2+x+4}{(-x+2)^2} = \frac{6}{(-x+2)^2} > 0$$

f_2 تابع متزايد تماماً على $]-\infty,0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\frac{3}{2}$ $\|\|$ $\frac{-1}{2}$	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

4) الرسم:



$\Delta_2 : y = \frac{3}{2}x + 2$

x	y	(x,y)
0	2	$(0,2)$
-2	-1	$(-2,-1)$

$\Delta_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$

x	y	(x,y)
0	2	$(0,2)$
2	1	$(2,1)$

حل التمرين 6

$f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$

أ) $A(1,2)$ نقطة حدية لمنحنى C

$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a(1)^2+b}{1} = 2$

$\Rightarrow a+b = 2 \Rightarrow \boxed{b = 2-a}$ ①

$A(1,2)$ النقطة الحدية تعني المشتق أي $f'(1)=0$

نشتق f بالنسبة إلى $\mathbb{R}^*$:

$f'(x) = \frac{2ax(x) - 1(ax^2+b)}{x^2} = \frac{2ax^2 - ax^2 - b}{x^2}$

$f'(x) = \frac{ax^2-b}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 0$

$\frac{a(1)^2-b}{1} = 0$

$\Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow \boxed{a=b}$ ②

نعوض ② في ①

$\Rightarrow b = 2-b$

$\Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow \boxed{b=1}$ نعوض في ②

$\boxed{a=1}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

ج) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ التابع

أ) f تابع فردي وشرحها $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{-0} = -\infty$ $x=0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{+0} = +\infty$ في جوار $+\infty$ و $-\infty$

---

f ا ـــ مشتقة على $\mathbb{R}^*$: $\frac{x(x)-1(x^2+1)}{x^2}$ توعرب

$f'(x) = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}}$

نفرض $f'(x)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1$

نجد: $x=-1$ أو $x=1$

$f(-1) = \frac{1+1}{-1} = -2$

$f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-1) = -2$ قيمة كبرى محلياً

$f(1) = 2$ قيمة صغرى محلياً

ب) شرط 1: $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

نضرب بـ -1:

$-x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ الشرط الأول تحقق

شرط 2: $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x}$

$= -f(x)$ الشرط الثاني تحقق

إذن تحقق الشرطين ⇐ f تابع فردي

(لأنه c متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات)

ج) المماس يوازي المستقيم d

$\Rightarrow m_{\text{مماس}} = m_d = -3$

$\Rightarrow f'(x_0) = m$

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = -3$

$$\frac{x^2-1}{x^2} = -3 \Rightarrow -3x^2 = x^2 - 1$$

$$-4x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$$

بتربيع الطرفين (يقبل C مماسين موازيين لـ (d))

إذا $x = -\frac{1}{2}$ $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}+1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$

أو $x = \frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

نقطة تماس المماس الأول مع الخط C

بفرض $A(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ $m = -3$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{5}{2} = -3(x + \frac{1}{2})$

المماس الأول

نقطة تماس المماس الثاني مع الخط C

بفرض $A'(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ $m = -3$

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -3(x - \frac{1}{2})$

المماس الثاني

(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

نفرض مستقيم Δ معادلته $y = x$

لنبين أن المنحنى C يقترب من Δ في جوار $\pm\infty$

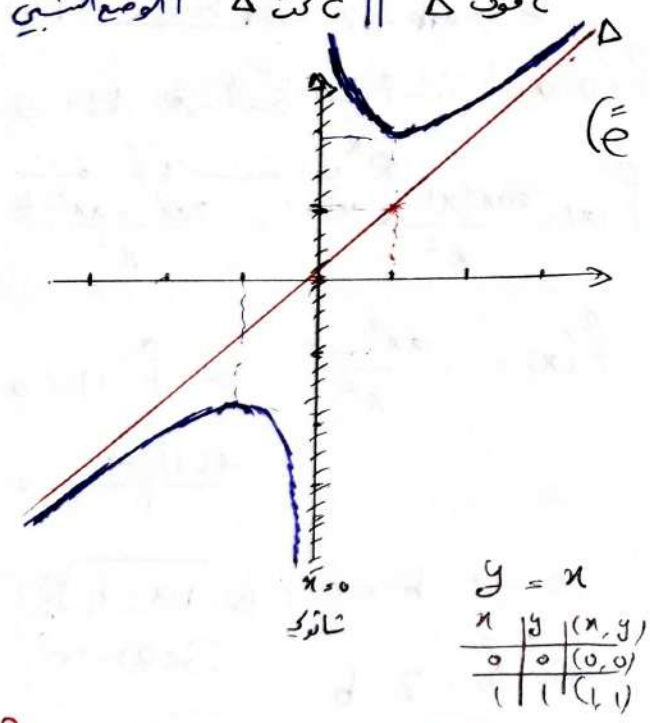
$$f(x) - y_\Delta = x + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y_\Delta] = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

إذا Δ مقارب مائل للخط C في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي:

	$-\infty$		0		$+\infty$
1	+ + + +		+		+ + + + +
x	- - - - -		+		+ + + + +
$f(x) - y_\Delta$	- - - - -		‖		+ + + + +
الوضع النسبي	C تحت Δ		‖		C فوق Δ



$y = x$

x	y	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$

حل التمرين 7

$f(x) = 2\sin x + \sin 2x$

(1) $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi)$

$= 2\sin x + \sin 2x$

$= f(x)$ إذاً f تابع دوري دوره 2π

الشرط 1: $x \in]-\infty, +\infty[$

نضرب بـ -1:

$-x \in]-\infty, +\infty[$ الشرط الأول محقق

$\Rightarrow -x \in D_f$

الشرط 2: $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin 2(-x)$

$= -2\sin x - \sin 2x$

$= -(2\sin x + \sin 2x) = -f(x)$

توعرب

التمرين الثاني حققت

f من حققت الشرطين : f تابع فردي

2) يكفي دراسة f على $[0, \pi]$

لأن f تابع دوري دوره 2π

ولأن f تابع فردي

نحصر البيان C منتظر بالنسبة

لمبدأ الإحداثيات

3) نشتق f بالنسبة لـ $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$$

$$= 2(\cos x + \cos 2x)$$ لكن $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$= 2(\cos x + 2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2(2\cos^2 x + \cos x - 1)$$

نضع $\cos x = t$

$$f'(x) = 2(2t^2 + t - 1)$$ نحلل $2t^2 + t - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(2t-1)(t+1)$$

	$2t^2$	$+t$	-1
$t+1$	$2t$	-1	
	$-2t^2$	$-2t$	
		$-t$	-1
		$+t$	$+1$
			0

$$\Rightarrow f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

وهو المطلوب

4) f تابع معرف ومستمر على $[0, \pi]$

$$f(0) = 2\sin(0) + \sin 2(0) = 0$$

$$f(\pi) = 2\sin(\pi) + \sin 2(\pi) = 0$$

f متقاقص على $[0, \pi]$

$$f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(2\cos x - 1)\cdot(\cos x + 1) = 0$$

أو $\cos x + 1 = 0$ أو $2\cos x - 1 = 0$

$\cos x = -1$ $\quad$ $2\cos x = 1$

$\boxed{x = \pi}$ $\quad$ $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$

$f(\pi) = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \sin 2\frac{\pi}{3}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} + \sin(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} + \sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

5)